4. CAMBIOS DE VARIABLES, INTEGRALES IMPROPIAS Y APLICACIONES

4.3. Integrales impropias

Integrales impropias

Una **integral múltiple** (doble, triple, ...) se dice **impropia** cuando el dominio de integración no está acotado o la función integrando no es acotada en el dominio de integración.

Integral impropia con dominio acotado y función no acotada

Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un recinto acotado y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que tiende a infinito en un número finito de puntos $\{P_1, P_2, \ldots, P_N\} \subset D$. Para cada $\varepsilon > 0$ se considera la integral de Riemann (propia) de f sobre $D_\varepsilon = D \setminus \bigcup_{i=1}^N B(P_i, \varepsilon)$, y se llama **integral impropia** de f sobre D al límite:

$$\int_D f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{D_\varepsilon} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

cuando este límite existe y es finito. Cuando no existe el límite o es infinito se dice que la integral impropia es divergente.

Ejemplo

Calcula las integrales impropias de las siguientes funciones sobre el dominio indicado:

1. $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, sobre $S = \big\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\big\}$.

2. $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, sobre $S = \big\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\big\}$.

3. $f(x,y) = \frac{1}{x-y}$, sobre el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(1,1)$.

Integral impropia con dominio no acotado

Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un recinto no acotado, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, y $\{D_N\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de recintos acotados tales que $\lim_{N\to\infty} D_N = D$ y f está acotada sobre cada D_N, $N \geq 1$. Se define la **integral impropia** de f sobre D como el límite:

$$\int_D f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \lim_{N \to \infty} \int_{D_N} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

cuando este límite, independientemente de la sucesión $\{D_N\}$ elegida, existe y es finito. Cuando no existe el límite o es infinito se dice que la integral impropia es divergente.

Observaciones

1. Cuando f tiene signo constante en D, el límite no depende de la sucesión $\{D_N\}$ elegida.

2. Posibles sucesiones de recintos son $D_N = D \cap B(0,N)$ ó $D_N = D \cap [-N,N]^n$, $N \geq 1$.

Ejemplo

Calcula la integral de $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ sobre $D = \{(x,y) : x, y \geq 0\}$.

Ejercicios

1. Halla la integral de $f(x,y) = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}$ sobre todo el plano y sobre cada uno de los recintos limitados por $y^2 = 2x$.

2. Calcula el área del recinto del primer cuadrante comprendido entre el eje de ordenadas y la curva $x^2 + y^2 = \left(\frac{y}{x}\right)^r$, $0 < r < 1$.

3. Halla la integral sobre todo el espacio $\mathbb{R}^3$ de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2+a^2)^2}$, $\quad a > 0$ **(b)** $f(x,y,z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)}$

4. Halla el volumen del recinto del primer octante limitado por la superficie $x^2 + y^2 = e^{-2z}\sqrt{\frac{y}{x}}$.

Soluciones y/o sugerencias a los ejercicios:

1. π, $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ y $(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}})\pi$.
2. $\frac{\pi}{4\cos\frac{\pi r}{2}}$.
3. **(a)** $\frac{\pi^2}{a}$; **(b)** $\pi^{3/2}$.
4. $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$.